EXERCICE : EOLIENNE

Mise en situation :

Une éolienne (figure 1) est un dispositif qui transforme l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique, dite énergie éolienne, laquelle est ensuite le plus souvent transformée en énergie électrique.

L'une des problématiques des éoliennes consiste à limiter la vitesse en bout de pâle à la vitesse du son afin d'éviter des phénomènes vibratoires pouvant conduire à la destruction de la structure.

Extraits du cahier des charges :

Vitesse du son	$V_s = 340\ m.s^{-1}$
Vitesse de rotation maximale de la nacelle pendant un temps court lors d'un coup de vent	ω_n=30 tr/min
Vitesse de rotation maximale de la pâle	ω_p=1 tr/s
Hauteur minimale du bout de pâle avec le sol	h=5 m
Longueur des pâles	Maximale

Objectif :

Notre objectif est de déterminer la longueur maximale des pâles permettant de respecter les critères du cahier des charges et d'en déduire la hauteur minimale de la nacelle associée.

Modélisation :

Une éolienne est composée de deux liaisons pivots permettant :

- La rotation de l'hélice par rapport à la nacelle ;
- La rotation de la nacelle par rapport à un axe verticale afin d'orienter l'hélice dans la direction du vent.

On propose le schéma cinématique de la figure 2 :

Hypothèses :

On considérera que les vitesses de rotations sont constantes :

$$\dot{\theta}_{1/0} = \omega_n = k_1 > 0$$

$$\dot{\theta}_{2/0} = \omega_p = k_2 > 0$$

Figure 1.1 : Eolienne

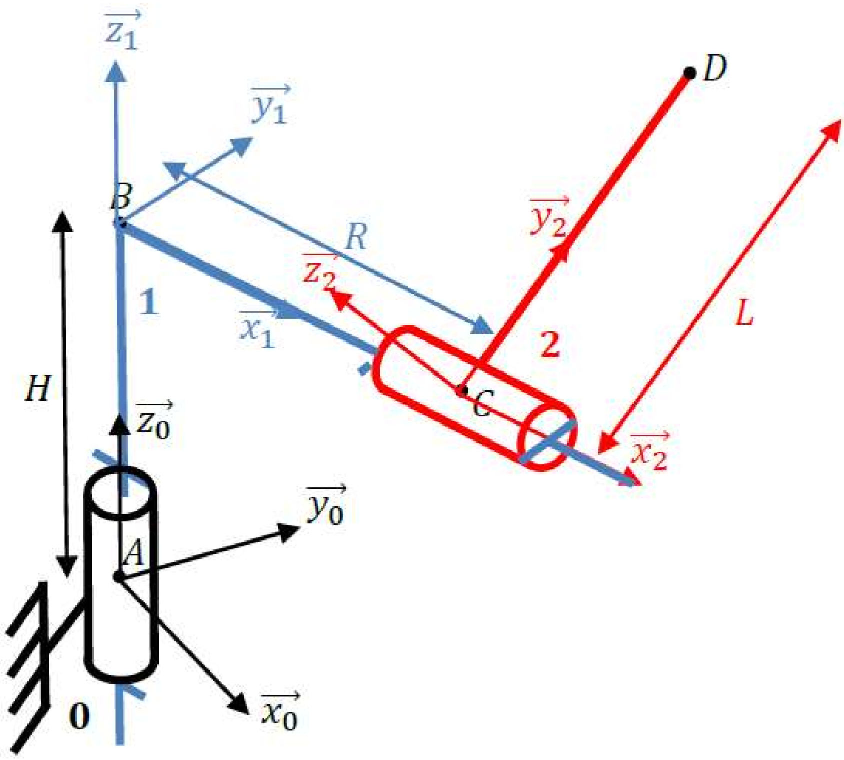

Figure 1.2 : Schéma cinématique

$$\overrightarrow{AB} = H\vec{z}_0 \ ; \ \overrightarrow{BC} = R\vec{x}_1 \ ; \ \overrightarrow{CD} = L\vec{y}_2 \ ; \ \vec{z}_0 = \vec{z}_1 \ ; \ \vec{x}_1 = \vec{x}_2 \ ; \ R = 10\,m$$

$$(\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1}) = \theta_{1/0} \ ; \ (\widehat{\vec{y}_1, \vec{y}_2}) = (\widehat{\vec{z}_1, \vec{z}_2}) = \theta_{2/0}$$

Questions :

Q1 : Exprimer le vecteur position par rapport au repère $\mathbf{0}$ de l'extrémité de la pâle $\boldsymbol{D}$ en fonction de $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{L}$.

Q2 : Etablir le graphe des liaisons du système.

Q3 : En déduire les 3 vecteurs rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{1/0}$; $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{2/1}$; $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{2/0}$

Q4 : Calculer la vitesse de l'extrémité $\boldsymbol{D}$ de la pâle $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{D}/\mathbf{0})$ à l'aide de la définition du vecteur vitesse (dérivation du vecteur position) en fonction de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1/0}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2/1}$, $\boldsymbol{\theta}_{21}$ et des vecteurs de base.

Q5 : Calculer $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{D},\mathbf{2}/\mathbf{0})$ par composition du mouvement.

Q6 : Exprimer ce vecteur vitesse dans la base $\mathbf{1}$.

Q7 : En déduire l'expression littérale de la norme de cette vitesse $\boldsymbol{V_D}$

Q8 : Déterminer $\boldsymbol{V_D}$ si $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1/0} = \mathbf{0}$ et commenter.

Q9 : Déterminer la position dans laquelle $\boldsymbol{V_D}$ est maximale si $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2/1} = \mathbf{0}$ et commenter.

Q10 : Montrer que $\boldsymbol{V_D}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{V_D = f(u) = \sqrt{(L\cos u)^2\left(k_1^2+k_2^2\right)+(Rk_1 - Lk_2\sin u)^2}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{u = \theta_{2/1}}$$

Q11 : Montrer que les extrema de la vitesse $\boldsymbol{V_D}$ sont obtenues pour la condition $\boldsymbol{(Lk_1\sin u + Rk_2)\cos u = 0}$

Q12 : En déduire le nombre d'extrema existant en fonction du rapport $\boldsymbol{\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}}$

Ce comportement particulier est issu du fait que la composante de la vitesse de D issue du mouvement de la nacelle augmente lorsque D s'éloigne de l'axe de rotation. Tant que la vitesse de la nacelle est assez faible, cette composante n'a pas d'influence sur les extrema de $\boldsymbol{V_D}$, mais dès qu'elle est assez grande, elle prend le dessus et ajoute deux extrema à $\boldsymbol{V_D}$.

Q13 : Déterminer les 2 ou 4 expressions de $\boldsymbol{u}$ donnant les extrema de $\boldsymbol{V_D}$ en fonction du rapport $\boldsymbol{\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}}$

Q14 : Déterminer les valeurs extrêmes de $\boldsymbol{VD}$ pour ces différentes positions et établir leur hiérarchie

Q15 : En déduire, selon le rapport $\boldsymbol{\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}}$, la valeur maximale $\boldsymbol{V_D^{max}}$

Q16 : Compte tenu des paramètres de notre éolienne, déterminer la valeur limite $\boldsymbol{L_{lim}}$ pour laquelle l'expression de $\boldsymbol{V_D^{max}}$ change.

Q 17 : En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de la longueur maximale $\boldsymbol{L}$ des pâles afin de respecter le cahier des charges.

Q18 : Préciser la hauteur $\boldsymbol{H}$ minimale la nacelle doit elle se trouver pour respecter le cahier des charges.

Q19 : Déterminer l'expression littérale de l'accélération de l'extrémité $\boldsymbol{D}$ de la pâle $\vec{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{D}/\mathbf{0})$ en fonction de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1/0}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2/1}$, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{1/0}$, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{2/1}$, et des vecteurs de base.

Q20 : En déduire l'expression littérale de l'accélération du bout de pâle en supposant que les vitesses de rotation sont constantes en fonction de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1/0}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2/1}$ et $\boldsymbol{\theta}_{21}$.